

実用的カルマンフィルター

広瀬直毅

九州大学大学院総合理工学研究科

1 はじめに

カルマンフィルター (Kalman filter, 以下 KF) については、昨年度の講義 [小守, 1997; 石川, 1997] でその基礎的な導出から非線型の取り扱いまで触れているので、昨年の参加者は初級とはいえ幅広い KF の知識を得たと思われる。筆者の経験は KF の線形的な取り扱いにほぼ限定されているので、こうした意味ではド初級である。が、これを実際の海洋データ同化で用いるという意味では応用と言えなくもない。そこで今回の話題の目的を明確にするために「実用的」なるタイトルをつけさせていただくことにする。

復習も兼ねて、必要な線形代数の基礎知識や KF の導出も本テキストに掲載する。人によって若干定義の差があるので、ここで筆者の(というより *Fukumori et al.* [1993, 1995ab] の) 定義に慣れていただきたい。その他、面倒な数式の導出など、必ずしも KF を使う際に必要なものではないが、念のため本テキストで紹介する。

また、実際の適用例を、質点の強制振動と Reduced gravity model の場合 [広瀬ら, 1997] について、途中途中で紹介する。読者が実際に KF を使用する際の一助となれば幸いである。

2 線型代数の基礎

話の敷居を下げるため、特に思い出して欲しい行列計算の準備をこの章で列挙する。

行列 (matrix)

$m \times n$ の行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

例えば、 $m = 2, n = 3$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (2)$$

である。

逆行列と転置行列

行列計算から遠ざかっている人は逆行列 (inverse matrix) と転置行列 (transpose matrix) さえ混同しがちである (一昨年の筆者)。逆行列とは、 A が正方行列 (square matrix) であるとき、

$$AX = XA = I \quad (3)$$

を満たすような X が存在すればこれを逆行列 A^{-1} という。I は単位行列 (identity matrix) である。

転置行列は行と列を入れ替えた形、例えば (2) に対応しては

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (4)$$

である。

ベクトル同士の積

同じベクトル長 m の x と y が与えられたとき、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

内積 (inner product) は

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m \quad (6)$$

のようにスカラー (scalar) で与えられ、外積 (outer product) は

$$\mathbf{xy}^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \cdots & x_m y_m \end{pmatrix} \quad (7)$$

のように行列で与えられる。前者は相関 (correlation) に、後者は共分散 (covariance) に深く関連する。

慣例に従い、ベクトルは英小太字 で、行列は英大太字 で表記する。

3 Filtering の定義

海洋の分野では時間フィルター (filter) の定義が曖昧に使われていることが多い。Fig. 1 に、統計・解析学としての filtering の定義を示す [Gelb 1974]。

解析される時間に対し、そこまでのデータのみが有効な場合 (a) が filtering、その時間の前後のデータが使える場合 (b) を smoothing、(a) よりもさらに過去までしかデータがない場合 (c) が prediction である。すなわち、カルマンフィルター (KF) とは、解析時までのデータを用いて最適推定 (optimal estimation) を行う手法である、ということができる。

4 データの準備

双子実験 (identical twin experiment) の場合は、擬似観測 (pseudomeasurement) によってモデルの結果に適切な誤差を与えるだけで観測データの準備ができるが、実際の観測データを同化する場合には、KF の仮定 (前提) を満足するようにデータを準備しなければならない。

まず注意すべき点はデータとモデルにバイアスがないことである。観測が統計的に十分な回数だけ行われていれば、この作業はデータとモデルの平均値を一致させることで近似的に行うことができる。広瀬ら [1997] の場合、人工衛星 TOPEX/POSEIDON (T/P) の海

面高度データの平均をモデルの平均場と一致させることにより、上記の仮定 (unbiased) を満足させるようにしている。結果的に、データ同化は変動分 (anomaly) に対してのみ行われ、平均場の改善はほとんど見込まれない。モデル平均場の改善は、同化以前にモデル自身 (初期・境界条件を含む) を改良することによってなされるべきである、というのが筆者の立場である。

次に、データの誤差がなるべく白色をしていることである。例えば T/P データの場合、海洋潮汐の aliasing (~ 100 日)、steric effect (~ 1 年) など、モデルが表現しない物理現象に時間的な相関があり、これらは可能な限り事前に除去しておくべきである。実際存在する海洋の現象であっても誤差として取り扱うことについては後に詳しく説明する。

広瀬ら [1997] の場合、1.5 層浅海波モデル (傾圧モデル) を使用しているため、上記のような物理現象を simulate することができない。よって、なるべく精度の高い潮汐モデルで潮位変動を除去し、熱膨張・収縮の変動分もその季節変動を海面熱フラックスのデータから推算して差し引いている。

5 モデル (力学的時間発展)

ある時間ステップ t で状態ベクトルの最適推定 (optimal estimation) $\mathbf{x}_t(+)$ が与えられていれば、次ステップ $t+1$ への時間発展は

$$\mathbf{x}_{t+1}(-) = \mathbf{A}\mathbf{x}_t(+) + \mathbf{G}\mathbf{w}_t \quad (8)$$

と表現できる。ここで \mathbf{A} を状態遷移行列 (state transition vector)、 \mathbf{G} を外力行列 (forcing matrix) と呼ぶ。符号 $(-)$ はまだデータ同化をしていない、 $(+)$ はデータ同化 (最適推定) を行ったことをそれぞれ表す。(詳しくは後述)

行列表記に見なれていない方は上のような式を見ただけで面食らってしまうが、(8) は単にモデルの時間積分を意味しているに過ぎない。なお、本テキストでは特に明記しない限り上記のような線形のシステムを考える。

質点の強制振動 (減衰項付き) の例を挙げると、支配方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mw(t) \quad (9)$$

$$v = \dot{x} \quad (10)$$

であり、これを時間前方 (Euler step) で差分化して行列表記すると、

$$\begin{pmatrix} x_{t+1}(-) \\ v_{t+1}(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\frac{k\Delta t}{m} & 1 - \frac{c\Delta t}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t(+) \\ v_t(+) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \end{pmatrix} w_t \quad (11)$$

となる。

日本海の Reduced gravity model [広瀬ら, 1997] の設定を Table 1 にまとめ、シミュレーションの結果例を Fig. 2 に示す。平均場の図より、東韓暖流、極前線、亜寒帯循環などがよく再現されていることがわかるが、東韓暖流が overshoot している点、対馬暖流日本沿岸分枝が存在しない点などが欠点として挙げられる。また、比較的強い変動が極前線以南の海域に散在するが、これらは台風などの局所的な風応力によって励起された渦構造をしており、ロスビー波の位相速度で西進することが確認されている。

実際に海洋循環モデルに対して自力で行列システムを定義することは非常に困難である。これらを数値的に構築する方法を後に紹介する。

6 誤差の時間発展

時間ステップ t での誤差共分散行列を

$$\mathbf{P}_t(+) = \langle \mathbf{p}_t(+) \mathbf{p}_t(+)^T \rangle \quad (12)$$

とする。 $\langle \rangle$ は期待値 (expected value) を意味する。エルゴート性 (ergodic) を仮定すると期待値は平均値に一致する。海洋でこれが成立する保証はないが、平均値と異なった期待値は推定し難いので、本テキストでは期待値を時間平均値と一致するものと仮定する。また、本来誰も知り得ない真の状態ベクトルを $\hat{\mathbf{x}}$ とすると、真値の時間発展は (8) と同様に

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{G}w_t + \mathbf{\Gamma}q_t \quad (13)$$

ここで新しく加わった項 $\mathbf{\Gamma}q_t$ はこの時間発展に伴って混入した誤差である。推定値と真値との関係は、

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{p} \quad (14)$$

で表される (\mathbf{p} は誤差ベクトル)。 (8) から (13) を引いて (14) を用いると

$$\mathbf{p}_{t+1}(-) = \mathbf{A}\mathbf{p}_t(+) - \mathbf{\Gamma}q_t \quad (15)$$

誤差共分散は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{t+1}(-) &= \langle \mathbf{p}_{t+1}(-)\mathbf{p}_{t+1}(-)^T \rangle \\
 &= \langle (\mathbf{A}\mathbf{p}_t(+) - \mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_t)(\mathbf{A}\mathbf{p}_t(+) - \mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_t)^T \rangle \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{P}_t(+)\mathbf{A}^T + \mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}_t\mathbf{\Gamma}^T
 \end{aligned} \tag{16}$$

ここで同化後の誤差 $\mathbf{p}_t(+)$ とモデルの時間発展に伴う誤差 \mathbf{q}_t とは無相関という仮定を用いた。なお

$$\mathbf{Q} = \langle \mathbf{q}\mathbf{q}^T \rangle \tag{17}$$

はモデルのシステム誤差共分散行列であり、力学的時間発展の間に混入した誤差（外力の誤差・パラメーターの誤差・差分誤差など）を意味する。

7 カルマンフィルターの導出

カルマンフィルター

ある時刻における観測は

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \tag{18}$$

と表すことができる。ここで \mathbf{H} は観測行列 (observation matrix), \mathbf{r} は観測誤差である。この章では添え字 t は省略する。単振動の例で観測を質点の位置についてのみ行うとすると、(18) を成分で表記すれば

$$x_{obs} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{true} \\ v_{true} \end{pmatrix} + r \tag{19}$$

である。また、力学的時間発展直後の状態ベクトルも同様に

$$\mathbf{x}(-) = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{p}(-) \tag{20}$$

成分表示すれば、

$$\begin{pmatrix} x(-) \\ v(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{true} \\ v_{true} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x(-) \\ p_v(-) \end{pmatrix} \tag{21}$$

である。

同化後の最適推定値 $x(+)$ は、力学 (モデル) から得た $x(-)$ と観測値 z との加重平均で求められると仮定すれば、任意の行列 K_1, K_2 を用いて

$$x(+)=K_1z+K_2x(-) \tag{22}$$

と表現できる。また、(20) と同様に

$$x(+)=\hat{x}+p(+)\tag{23}$$

という関係も認める。仮定ついでに各誤差の期待値は 0、つまり観測やモデルの平均値に真値からのバイアスはないと仮定し、観測誤差と力学発展後 (同化前) の誤差とは無相関であるとする。

$$\langle r \rangle = 0 \tag{24}$$

$$\langle p(-) \rangle = 0 \tag{25}$$

$$\langle p(+)\rangle = 0 \tag{26}$$

$$\langle rp(-)^T \rangle = 0 \tag{27}$$

(22) と (23) より

$$K_1z+K_2x(-)=\hat{x}+p(+)\tag{28}$$

(18), (20) を代入して

$$(K_2+K_1H-I)\hat{x}+K_2p(-)+K_1r=p(+)\tag{29}$$

両辺の期待値をとると、

$$\begin{aligned} (K_2+K_1H-I)\langle \hat{x} \rangle + K_2\langle p(-) \rangle + K_1\langle r \rangle \\ = \langle p(+)\rangle \end{aligned} \tag{30}$$

$\langle \hat{x} \rangle$ は 0 とは限らず、他の期待値は全て 0 なので

$$K_2=I-K_1H \tag{31}$$

(22) へ代入して

$$\mathbf{x}(+) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1\mathbf{H})\mathbf{x}(-) + \mathbf{K}_1\mathbf{z} \quad (32)$$

$$= \mathbf{x}(-) + \mathbf{K}_1(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}(-)) \quad (33)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ を innovation vector という。

\mathbf{K}_2 が \mathbf{K}_1 から求まることはわかったが、まだ \mathbf{K}_1 は未定である。ここで、同化後の誤差共分散行列に注目すると、

$$\mathbf{P}(+) = \langle \mathbf{p}(+)\mathbf{p}(+)^T \rangle \quad (34)$$

(29), (31) を代入して整理すると、

$$\mathbf{P}(+) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1\mathbf{H})\mathbf{P}(-)(\mathbf{I} - \mathbf{K}_1\mathbf{H})^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \quad (35)$$

ここで $\mathbf{R} = \langle \mathbf{r}\mathbf{r}^T \rangle$ は観測誤差共分散行列である。結局、この誤差 $\mathbf{P}(+)$ を最小にする \mathbf{K}_1 が知りたいのである。この問題は次の評価関数 (cost function) J を導入することで解決する。

$$J = \langle \mathbf{p}(+)\mathbf{p}(+)^T \rangle \quad (36)$$

$$= \text{trace}\{\mathbf{P}(+)\} \quad (37)$$

この評価関数の極小値を求めることが、誤差 $\mathbf{P}(+)$ の対角成分を最小にする \mathbf{K}_1 を求めることに同値となる。

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{K}_1} = \mathbf{0} \quad (38)$$

(38) へ (37) を代入し、 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}}\{\text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T)\} = 2\mathbf{A}\mathbf{B}$ を使うと、

$$-2(\mathbf{I} - \mathbf{K}_1\mathbf{H})\mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T + 2\mathbf{K}\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{H}\mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}) = \mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (40)$$

こうしてついに得られた係数 \mathbf{K}_1 (以後 \mathbf{K}) をカルマンゲイン (Kalman gain) と呼ぶ。

同時に誤差自身についても (35) を展開して

$$\mathbf{P}(+) = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}(-) - \mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\{\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}\}\mathbf{K}^T \quad (41)$$

(39) を代入して

$$\mathbf{P}(+) = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{P}(-) \quad (42)$$

$$= \mathbf{P}(-) - \mathbf{KHP}(-) \quad (43)$$

を得る。データ同化に伴い、誤差は $\mathbf{KHP}(-)$ だけ小さくなるということを意味している。

さらにカルマンゲイン \mathbf{K} を簡略化することができる。(40) を (43) へ代入して

$$\mathbf{P}(+) = \mathbf{P}(-) - \mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{HP}(-) \quad (44)$$

両辺に右から $\mathbf{P}(-)^{-1}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})$ を掛けて

$$\mathbf{P}(+)\mathbf{P}(-)^{-1}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}) - \mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T \quad (45)$$

右辺と左辺を入れ替えて左から $\mathbf{P}(+)^{-1}$ を掛ける。

$$\mathbf{P}(+)^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{H}^T + \mathbf{P}(-)^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{R} \quad (46)$$

$$\mathbf{P}(+)^{-1} = \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{P}(-)^{-1} \quad (47)$$

上式を使用して (40) の右辺に小細工を弄する。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{P}(+)\mathbf{P}(+)^{-1}\mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ &= \mathbf{P}(+)(\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{P}(-)^{-1})\mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

1つ目の括弧を少し展開して \mathbf{H}^T でくくると

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}(+)\mathbf{H}^T(\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{HP}(-)^{-1}\mathbf{H}^T)(\mathbf{HP}(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (49)$$

$$= \mathbf{P}(+)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (50)$$

(50) は (40) より簡単なカルマンゲインの定義式となっている。

結局、モデルについては (8), (33), (40) or (50) を使用して、誤差については (16), (40), (43) を使用して連続的な最適同化ができることがわかる。

なお、誤差の3式については(40), (43)を(16)へ代入することにより1つの式にまとめることができる。

$$\mathbf{P}_{t+1}(-) = \mathbf{A}\{\mathbf{P}_t(-) - \mathbf{P}_t(-)\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t(-)\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_t(-)\}\mathbf{A}^T + \mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}^T \quad (51)$$

この式をリカッチ方程式 (Riccati difference equation, RDE) という。モデルの値 (状態ベクトル) がなくとも誤差は誤差だけで時間発展することがよくわかる。

8 誤差の推定

一般的に観測誤差とモデルの誤差を知る事は簡単ではない。しかし、統計的な手法を用いればある程度これらを推定する事が可能である、としたのが *Fu et al.* [1993] である。福森さんから習った事で、最も驚いたのが実はこの誤差の推定である。

真値と観測値またはモデルの値 (状態ベクトル) との関係は、(18) 及び (14) で表される。
 $\mathbf{H}\times(14)$ より

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{H}\mathbf{p}_{sim} \quad (52)$$

誤差を \mathbf{p}_{sim} としたのはカルマンフィルターで同化の前後で変化する誤差と区別するためである。(本章では非同化、シミュレーションの誤差。) それぞれの共分散の期待値をとると

$$\langle \mathbf{H}\mathbf{x}(\mathbf{H}\mathbf{x})^T \rangle = \langle \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \rangle + \mathbf{H}\mathbf{P}_{sim}\mathbf{H}^T \quad (53)$$

$$\langle \mathbf{z}\mathbf{z}^T \rangle = \langle \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \rangle + \mathbf{R} \quad (54)$$

(18)–(52) より

$$\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}_{sim} \quad (55)$$

共分散の期待値をとって

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \rangle &= \langle (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}_{sim})(\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}_{sim})^T \rangle \\ &= \mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}_{sim}\mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (56)$$

(53), (54), そして (56) の3式中で未知数は3つなのでこれは解くことができ、

$$\mathbf{R} = \{ \langle (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \rangle - \langle \mathbf{H}\mathbf{x}(\mathbf{H}\mathbf{x})^T \rangle + \langle \mathbf{z}\mathbf{z}^T \rangle \} / 2 \quad (57)$$

$$\mathbf{HP}_{sim}\mathbf{H}^T = \{ \langle (\mathbf{z} - \mathbf{Hx})(\mathbf{z} - \mathbf{Hx})^T \rangle + \langle \mathbf{Hx}(\mathbf{Hx})^T \rangle - \langle \mathbf{zz}^T \rangle \} / 2 \quad (58)$$

$$\langle \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \rangle = \{ -\langle (\mathbf{z} - \mathbf{Hx})(\mathbf{z} - \mathbf{Hx})^T \rangle + \langle \mathbf{Hx}(\mathbf{Hx})^T \rangle + \langle \mathbf{zz}^T \rangle \} / 2 \quad (59)$$

観測値とシミュレーション、それに両者の差が与えられれば、観測とシミュレーションの誤差 (の共分散) と真値の共分散が推定できる、ということを上式は意味している。

ただし、モデルでシミュレーションできない成分 (表現誤差, missing physics, model's representation error) は観測誤差の一部として評価されることに注意すべきである。[Cohn, 1997]

これまで真値を $\hat{\mathbf{x}}$ (その大きさはモデルの変数と一致) としてきたが、実際の海洋で真の状態を記述するためには個々の流体粒子の運動まで考慮せねばならず、無限に近い大きさのベクトル \mathbf{s} が必要である。即ち、一般的に \mathbf{s} の大きさは \mathbf{x} ないしは $\hat{\mathbf{x}}$ と比べて桁違いに大きいと言える。

海洋観測はその測定誤差を ϵ とすると、

$$\mathbf{z} = \mathbf{E}\mathbf{s} + \epsilon \quad (60)$$

関数 \mathbf{E} は海洋観測を表すオペレーターである。モデル空間を意識して (60) を書き直すと、

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \{ \mathbf{E}\mathbf{s} - \mathbf{H}(\mathbf{\Pi}\mathbf{s}) \} + \epsilon \quad (61)$$

ここでオペレーター $\mathbf{\Pi}$ は海洋の状態をモデル空間へ射影する働きをする。すなわち、 $\mathbf{\Pi}\mathbf{s} \equiv \hat{\mathbf{x}}$ である。

(61) の右辺第 2 項がまさにモデルの missing physics であり、例えばサブグリッドスケールの運動、Reduced gravity model であれば表現できない順圧成分などがこれに相当する。(18) と比較すれば、

$$\mathbf{r} = \{ \mathbf{E}\mathbf{s} - \mathbf{H}\mathbf{\Pi}\mathbf{s} \} + \epsilon \quad (62)$$

となり、定義した観測誤差にモデルの missing physics が含まれることが明らかとなる。

実際に (57), (58) を用いて RG model と T/P のそれぞれの誤差 (分散) を推定すると [広瀬ら, 1997]、それぞれ海面変位で平均 3.05^2 cm^2 , 7.24^2 cm^2 という値が得られた。一般的に言われている T/P の測定誤差はせいぜい 2 ~ 3 cm 程度であり、残りの部分は表現誤差と推定される。

9 行列作成

状態遷移行列 (state transition matrix)、外力行列 (forcing matrix)、観測行列 (observation matrix) らはどうしてもカルマンフィルターの計算上欠かせないシステム行列 (system matrix) である。簡単なモデル (質点の単振動など) であれば即座にこれらを決定することができるが、複雑なプログラム・コードで記述されている海洋循環モデルのそれを自力で定義することは、面倒な作業である上に間違いのもとにもなりかねない。さらにモデルの非線型項の取り扱いも面倒である。

Fukumori et al. [1993] はこれらの行列を数値的に作る事を推奨している。物理学で言うところの仮想変位の原理を利用している、と言った方が理解しやすいかもしれない。

海洋循環モデルのコードが行列形式で書かれている事はまずないが、外力が与えられなければ (8) と同様に

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t \quad (63)$$

の計算を行っていることは確かである。当然、 $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}$ であるので、単位行列を単位 (列) ベクトル \mathbf{i}_m に分離して一つずつ与えてやる。例えば第 1 列目は

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{i}_1 \quad (64)$$

成分で表記すれば、

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

の関係が成立するはずである。つまり、モデルの支配変数の一番目に単位量の摂動を与えてその時間発展した後の姿を状態遷移行列 \mathbf{A} の第一列目とするのである。この作業をすべての支配変数について繰り返していく事により行列 \mathbf{A} は完成する。

この作業はモデルの単位時間ステップではなく、同化の時間間隔で行う事が望ましい。つまり、単位量の摂動を与えた後にモデルを 1 日なり 10 日なり決められた同化間隔まで走らせてしまうのである。これによりたった一度の線型変換でモデルの力学的時間発展が記述される事となる。(CFL 条件も満足する。) 以後、状態遷移行列 \mathbf{A} は同化時間間隔の力学的 (モデルの) 時間発展を表すものとする。

より一般的に表記すれば、行列 A を構成する m 番目の列ベクトル \mathbf{a}_m は

$$\mathbf{a}_m \approx \mathcal{F}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{i}_m) - \mathcal{F}\bar{\mathbf{x}} \quad (66)$$

のように規定の場合 $\bar{\mathbf{x}}$ (モデルの平均値など) からの一次摂動をとって処理する事ができる。ここで \mathcal{F} はモデルの (非線型発展をも含んだ) 力学的時間発展を記述するオペレーターである (要するにモデル自身)。

また、他のシステム行列 G, H に関しても同様に摂動を与える事により、数値的に構築する事が可能である。

モデルの状態が規定の場合からの一次近似で表現できるならば上記の数値解法は簡便で安全な行列作成方法である。

10 定常近似

データが時間・空間的に一定間隔で入力されるとき、誤差共分散行列 $\mathbf{P}_t(-)$ (と $\mathbf{P}_t(+)$) はしばしば一定値に収束することが知られている (Fig. 3)。定常な行列 $\mathbf{P}_t(-)$ が存在すればそれを事前に計算しておくことで、同化の度に計算する必要はなくなる [Gelb, 1974]。

また、Anderson and Moore [1979] は RDE の定常解をすばやく求める方法 (doubling algorithm, 倍加法) を提唱している。この方法を用いれば時間 t における誤差共分散 $\mathbf{P}_t(-)$ からいきなり時間 $2t$ におけるそれ $\mathbf{P}_{2t}(-)$ を求める事が可能である。

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathbf{A}^T \\ \Psi_1 &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \\ \Theta_1 &= \mathbf{\Gamma} \mathbf{Q} \mathbf{\Gamma}^T \end{aligned} \quad (67)$$

を初期値として

$$\begin{aligned} \Phi_{t+1} &= \Phi_t (\mathbf{I} + \Psi_t \Theta_t)^{-1} \Phi_t \\ \Psi_{t+1} &= \Psi_t + \Phi_t (\mathbf{I} + \Psi_t \Theta_t)^{-1} \Psi_t \Phi_t^T \\ \Theta_{t+1} &= \Theta_t + \Phi_t^T \Theta_t (\mathbf{I} + \Psi_t \Theta_t)^{-1} \Phi_t \end{aligned} \quad (68)$$

を繰り返し、

$$\Theta_{t+1} \approx \Theta_t \quad (69)$$

となったところで計算をやめる。ここで、

$$\mathbf{P}_{2t}(-) = \Theta_t \quad (70)$$

である。(証明は原著を参照のこと。)しかし、controlability や observability に問題があると収束値は得られない。

日本海の RG + T/P 同化の場合 [広瀬ら, 1997]、上記の計算を 5 回 (10 day \times 2⁵ ~ 310 day) 繰り返したただけでほぼ定常な誤差が得られた。RDE であれば 31 回の繰り返し計算が必要なところである。

また、こうして得られた誤差 $\mathbf{P}(-)$ を (44) により update して $\mathbf{P}(+)$ を得ておけば、(50) でより計算量が少なくカルマンゲインを得ることができる。

11 縮小近似

縮小モデルの近似 (reduced state approximation) はモデルの自由度を下げて KF の計算を行う強力な近似である。筆者はこれを福森近似と呼んでもいいのではないかと思うほどだが、本人が最近の何にでも固有名詞をつけたがる傾向を嫌がっている (?) ので控えている。

モデルの摂動部分がより配列の小さなベクトル (例えば空間的にはより大きいスケール) \mathbf{x}' に集約することができるならば、

$$\mathbf{x}_t \approx \mathbf{B}\mathbf{x}'_t + \bar{\mathbf{x}} \quad (71)$$

の関係が得られる。ここで \mathbf{B} はもとの状態ベクトルの大きさに線型変換するための行列、ベクトル $\bar{\mathbf{x}}$ はモデルのある既定の基本場であり、本テキストではモデルの時間平均場を用いる。誤差共分散行列もまた同様にして、

$$\mathbf{P}_t \approx \mathbf{B}\mathbf{P}'_t\mathbf{B}^T \quad (72)$$

となる。この近似の許でカルマンゲイン (40) は

$$\mathbf{K}_t \approx \mathbf{B}\mathbf{P}'_t(-)\mathbf{B}^T\mathbf{H}_t^T(\mathbf{H}_t\mathbf{B}\mathbf{P}'_t(-)\mathbf{B}^T\mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (73)$$

$$\approx \mathbf{B}\mathbf{P}'_t(-)\mathbf{H}_t^T(\mathbf{H}'_t\mathbf{P}'_t(-)\mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (74)$$

と近似され、より簡便な形の (50) は、

$$\mathbf{K}_t \approx \mathbf{B}\mathbf{P}_t(+)' \mathbf{B}^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \quad (75)$$

$$\approx \mathbf{B}\mathbf{P}_t(+)' \mathbf{H}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \quad (76)$$

と表記することができる。ここで、 $\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{B}$ である。

縮小近似場における定常誤差共分散行列 \mathbf{P}' も、 $\mathbf{A}' = \mathbf{B}^* \mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathbf{G}' = \mathbf{B}^* \mathbf{G}$ などとおくことにより、RDE ないしは doubling algorithm を用いて同様に計算することができる。 \mathbf{B}^* は

$$\mathbf{B}^* \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (77)$$

(\mathbf{I} は単位行列) を満たす一般逆行列 (pseudo inverse matrix) である (\mathbf{B} は多くの場合正方行列ではない)。

同化の精度は (71) の近似がどれだけ正確に成り立つかに依存する。数値モデルで解像しきれない程度のスケール以下の誤差を無視するならば、 \mathbf{x}' はモデル格子間隔の数倍程度で十分ということになる。

水平的には、例えば *Fukumori* [1995] は $7.5^\circ \times 3^\circ$ の coarse grid (モデル格子は $2^\circ \times 1^\circ$) を採用し、広瀬ら [1997] は $1^\circ \times 1^\circ$ の coarse grid (モデル格子は $1/6^\circ \times 1/6^\circ$) を用いている (Fig. 4)。(縮小モデルとは言っても空間的にはより大きなスケールが選ばれることに注意。) あるフランスの研究者 (名前は忘れてしまった) は EOF 解析を利用して寄与率の高いモードの変動を抽出して同様の縮小モデルの近似を行っていた。

鉛直方向にはモード展開して有意な (卓越する) モードのみを選択し、高次の傾圧モードを無視することで近似を行うことができる。

線形変換行列 \mathbf{B} は縮小モデルを元のモデルに記述し直す行列である。線形補間、スプライン補間、最適内挿法、分離されたモードの積分などがこの行列で記述される。その一般逆行列 \mathbf{B}^* はサブルーチンライブラリ (SSLII, IMSL, Numerical Recipe など) を利用して求められるが、筆者らは安定な特異値分解 (SVD) 法を好んで使っている。

この近似に重要なことは対象となる海洋現象のスケールを考慮して、かつ KF の計算ができる程度に小さい縮小モデルを構築することである。

注目すべき点は、縮小モデル近似はKFによる誤差の修正時にのみ使用され、モデルの時間発展自体には何の近似も行わないことである。つまり、一定スケールを境にそれ以上の誤差はKFによって修正され、それ以下は触れられないため、小さなスケールの現象は同化の前後で保存されるということである。

12 適合検査（事後検査）

カルマンフィルタによるデータ同化が本当に最適に行われたかどうか確認する方法がある。第7章と似たようなアプローチになるが、真値と観測値の関係は(18)で表され、モデルの値(状態ベクトル)は同化の前後で(20), (23)を満たすという仮定を再び使用する。

同化前は(56)と同様に

$$\begin{aligned} \langle (z - \mathbf{H}\mathbf{x}(-))(z - \mathbf{H}\mathbf{x}(-))^T \rangle &= \langle (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}(-))(\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}(-))^T \rangle \\ &= \mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}(-)\mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (78)$$

の関係が成り立つはずである。

同化後については、

$$\begin{aligned} \langle (z - \mathbf{H}\mathbf{x}(+))(z - \mathbf{H}\mathbf{x}(+))^T \rangle &= \langle (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}(+))(\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}(+))^T \rangle \\ &= \mathbf{R} - \langle \mathbf{r}\mathbf{p}(+)^T \rangle \mathbf{H}^T - \mathbf{H}\langle \mathbf{p}(+)\mathbf{r}^T \rangle + \mathbf{H}\mathbf{P}(+)\mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (79)$$

(20), (23)を(33)へ代入して得られる

$$\mathbf{p}(+) = \mathbf{p}(-) + \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{p}(-)) \quad (80)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\mathbf{p}(+)^T \rangle &= \langle \mathbf{r}\mathbf{p}(-)^T \rangle + \mathbf{R}\mathbf{K}^T - \langle \mathbf{r}\mathbf{p}(-)^T \rangle \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T \\ &= \mathbf{R}\mathbf{K}^T \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(+)\mathbf{r}^T \rangle &= \langle \mathbf{p}(-)\mathbf{r}^T \rangle + \mathbf{K}\mathbf{R} - \mathbf{K}\mathbf{H}\langle \mathbf{p}(-)\mathbf{r}^T \rangle \\ &= \mathbf{K}\mathbf{R} \end{aligned} \quad (82)$$

ここで、同化前の誤差 $p(-)$ と観測誤差 r は無相関であるという仮定を用いた。これらを (79) に代入し、(50) を用いると、

$$\begin{aligned} \langle (z - Hx(+))(z - Hx(+))^T \rangle &= R - RR^{-1}HP(+)\mathbf{H}^T - HP(+)\mathbf{H}^TR^{-1}R + HP(+)\mathbf{H}^T \\ &= R - HP(+)\mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (83)$$

を得る。以上の計算で注意すべき所は、同化前は観測とモデルの誤差に相関はない(27)と仮定したが、同化後は相関がある点である。

適合検査 (consistency check) とは、同化の前後で (78), (83) がそれぞれ成り立っているかを調べることである。(ほぼ) 成立していれば同化は (ほぼ) 最適に行われたということができ、不成立ならば最初に与えた観測およびモデルの誤差共分散行列 R, Q を補正 (calibration) する必要がある。

13 結果

1993年8月1日のシミュレーション (非同化) と同化後の内部境界面変位の分布を Fig. 5 に示す。全体的な分布は両者共に平均場 (Fig. 2a) と似ているが、細部では相違点も多い。特に、暖水域、冷水域にそれぞれ数個ずつ存在する中規模渦の位置や大きさ、極前線の蛇行などが異なっている。

比較のため、Fig. 6 に同時期の CTD (conductivity-temperature-depth profiling system) 及び XBT (expendable bathythermograph) 観測に基づく 100, 200 m 水深における水温の水平分布を示す。100 m 深でははっきりしないが 200 m 深の図で確認できる北緯 38.5°, 東経 134° 付近の暖水渦 A が同化後に現れた暖水渦 A' とよく対応している。また、同じ Fig. 6 内に示した冷水塊 B も Fig. 5(b) の B' に対応しているように見える。海面だけの情報でも海洋内部の変動をうかがい知ることができる一例といえるだろう。しかし、現場観測が少なく観測の海域も限られているため、他の中規模渦との対応はこれほど明瞭ではなかった。

同化によって得られた海面高度場と TOPEX/POSEIDON 海面高度データとを比較すると (Fig. 7b)、非同化の場合 (Fig. 7a) に比べて全体的に相関が上昇していることが確認される。特に極前線以南の暖流域では 0.2 ~ 0.5 の比較的高い相関を見ることができる。

同化の結果、説明することのできる変動の分散を Fig. 8b に示す。亜寒帯循環の広い海

域と日本沿岸においては、このモデルでは海面高度計データの変動を何も説明することができなかったことを示唆している。極前線以北の寒流域では成層が弱く傾圧第一モードが発達しにくい状況であるため、むしろこのモデルでは表現できない順圧成分の方が卓越しているものと推測される。

逆に極前線以南の広い海域で説明分散が $5 \sim 20 \text{ cm}^2$ 以上となっており、モデルとデータに共通する成分として傾圧第一モードの卓越を認めることができる。同海域では表層の対馬暖流水と下層の日本海固有水との密度差が大きく、傾圧性の強い現象（東韓暖流や中規模渦など）が存在していることが知られており [長沼, 1977; Yoon, 1991]、この結果はそれを定量的に支持するものであるといえる。

また、山陰海岸から能登半島にかけての日本沿岸沿いと朝鮮半島の北東岸付近に、相関が低く説明分散も負の海域が存在するが、これらはモデルの特に不正確な場所を示唆しているように見える。このモデルでは日本沿岸の陸棚縁に沿って流れるべき対馬暖流が存在せず、東韓暖流の離岸位置が北へずれているからである (Fig. 2a)。

KF によって得られた最適推定場 $x_t(+)$ を初期値として、数値予報を行うことが可能である。ここでは同化直前の $Hx_t(-)$ を同化から 10 日後 (正確には 9.9156 日後) の予報値として議論する。厳密には毎日正午に同化を行っているので 10 日後の予報という表現は適切ではないかもしれないが、各観測点で見ると 10 日毎にしかデータを使用していないので、実質的に $Hx_t(-)$ が 10 日後の予報値となっていると考えられる。

Fig. 7(c) に予報値 $Hx_t(-)$ と観測値 z_t との相関の分布図を示す。相関の平均値は 0.294 から 0.211 に減少しているが、極前線以南の暖流域では依然として有意な相関を示している。説明することのできる変動の分散 (Fig. 8c) も多少小さくなっているものの、同化直後と同様の分布をしている。同化から 10 日後の状態は十分に予報が可能であると言える。本モデルの典型的な変動の時間スケールは数十日から 100 日以上であるので、傾圧第一モードの予測はこの時間スケール程度の範囲で可能であると推測される。

A Appendix A: *Ide et al.* [1997] との対応

Ide et al. [1997] によって提示された統一表記法と本テキストで使用した記号とは若干相違があるので、特に異なっていると思われる記号を列挙する。左辺が本テキスト、右辺

が *Ide et al.* [1997] のそれである。

真の状態ベクトル

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}^t(t_i) \quad (\text{A1})$$

観測ベクトル

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_i^o \quad (\text{A2})$$

状態遷移行列

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{M}_i \quad (\text{A3})$$

同化前の予報値

$$\mathbf{x}_t(-) = \mathbf{x}^f(t_i) \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{P}_t(-) = \mathbf{P}^f(t_i) \quad (\text{A5})$$

(-) が上付きの f に対応する。

同化後の最適推定値 (解析値)

$$\mathbf{x}_t(+) = \mathbf{x}^a(t_i) \quad (\text{A6})$$

$$\mathbf{P}_t(+) = \mathbf{P}^a(t_i) \quad (\text{A7})$$

(+) が上付きの a に対応する。

モデルのシステム誤差 (termed process noise) とその共分散行列

$$\Gamma \mathbf{q}_t = \boldsymbol{\eta}(t_i) \quad (\text{A8})$$

$$\Gamma \mathbf{Q}_t \Gamma^T = \mathbf{Q}(t_i) \quad (\text{A9})$$

謝辞

本研究は福森一郎博士 (JPL) および尹宗煥教授 (九州大) の指導の許に行われている。
また、長谷英昭氏 (九州大) による校閲に感謝する。

References

- Anderson, B. D. O. and J. B. Moore (1979) : *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 357pp.
- Bretherton, F. P., R. E. Davis and C. B. Fandry (1976) : A technique for objective analysis and design of oceanographic experiments applied to MODE-73. *Deep Sea Res.*, **23**, 559-582.
- Bendat, J. S. and A. G. Piersol (1971) : *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. Wiley-Interscience, New York, NY, 407pp.
- Cohn, S. E. (1997) : An introduction to estimation theory. *J. Meteor. Soc. Japan*, **75**, 257-288.
- Fu, L.-L., I. Fukumori and R. N. Miller (1993) : Fitting dynamic models to the Geosat sea level observations in the Tropical Pacific Ocean, II, A linear, wind-driven model. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 2162-2181.
- Fukumori, I., J. Benveniste, C. Wunsch and D. B. Haidvogel (1993) : Assimilation of sea surface topography into an ocean circulation model using a steady-state smoother. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1831-1855.
- Fukumori, I. and P. Malanotte-Rizzoli (1995) : An approximate Kalman filter for ocean data assimilation: An example with an idealized Gulf Stream model. *J. Geophys. Res.*, **100**, 6777-6793.
- Fukumori, I. (1995) : Assimilation of TOPEX sea level measurements with a reduced-gravity shallow water model of the tropical Pacific Ocean. *J. Geophys. Res.*, **100**, 25027-25039.
- Gelb, A. (1974) : *Applied Optimal Estimation*. M.I.T. Press, Cambridge, MA, 374 pp.
- Gill, A. E. and P. P. Niiler (1973) : The theory of the seasonal variability in the ocean. *Deep Sea Res.*, **20**, 141-177.
- Grewal, M. S., and A. P. Andrews (1993) : *Kalman filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 381pp.
- 広瀬直毅, 福森一郎, 尹宗煥 (1997) : 1.5 層浅海波モデルに対する海面高度計データの同化—1993 ~ 1994 年の日本海の場合—, 九州大学応用力学研究所所報, **82**, 73-95.
- Hirose, N., C.-H. Kim and J.-H. Yoon (1996) : Heat budget in the Japan Sea. *J. Oceanogr.*, **52**, 553-574.
- Ide, K., P. Courtier, M. Ghil, A. C. Lorenc (1997) : Unified notation for data assimilation: operational, sequential and variational, *J. Meteorol. Soc. Japan*, **75**, 181-189.
- 池田元美, 淡路敏之編 (1996) : '96 データ同化夏の学校講義ノート, (財) 日本海洋科学振興財団, 青

- 森県むつ市, 膨大 pp.
- 池田元美, 淡路敏之編 (1997) : 海洋学におけるデータ同化 ('97データ同化夏の学校講義ノート), (財) 日本海洋科学振興財団, 青森県むつ市, 136pp.
- 磯辺篤彦 (1994) : 対馬海峡における対馬暖流について, 月刊海洋, **26**, 802-809.
- Kim, C.-H. and J.-H. Yoon (1996) : Modeling of the wind-driven circulation in the Japan Sea using a reduced gravity model. *J. Oceanogr.*, **52** , 359-373.
- 舞鶴海洋气象台 (1993) : 海洋速報, **383**, 37pp.
- Na, J.-Y. and J.-W. Seo (1995) : Comparison between the sea surface winds and the current measurements in the northern part of the East/Japan Sea. *8th PAMS & JECSS Workshop*, Matsuyama, Japan, 82-87.
- 長沼光亮 (1977) : 日本海の海況変動, 海洋科学, **9**, 137-141 (1977).
- Senjyu, T. and H. Sudo (1993) : Water characteristics and circulation of the upper portion of the Japan Sea Proper Water. *J. Mar. Sys.*, **4**, 349-362.
- 四竈信行 (1994) : 海底設置型 ADCP により実測された津軽海峡内の流量変動, 月刊海洋, **26**, 815-818.
- Shum, C. K., P. L. Woodworth, O. B. Andersen, G. D. Egbert, O. Francis , C. King, S. M. Klosko, C. Le Provost, X. Li, J.-M. Molines, M. E. Parke, R. D. Ray, M. G. Schlax, D. Stammer, C. C. Tierney, P. Vincent and C. I. Wunsch (1997) : Accuracy assessment of recent ocean tide models. *J. Geophys. Res.*, **11**, 25173-25194.
- UNESCO (1981) : *Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards*. UNESCO Tech. Paper Mar. Sci., No. 36, UNESCO, Paris.
- Wunsch, C. (1996) : *The Ocean Circulation Inverse Problem*, Cambridge University Press, Cambridge, NY, 442pp.
- Yoon, J.-H. (1991) : The seasonal variation of the East Korean Warm Current. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu University*, **38**, 23-36.

Table and Figure Legends

Table 1. 広瀬ら [1997] が使用したモデルの各種パラメータと境界条件、初期条件の一覧表

Fig. 1. (a) Filtering, (b) Smoothing, (c) Prediction の違いの概念図。[Gelb, 1974 より抜粋]

Fig. 2. (a) 1993~1994 年の 2 年間平均の内部境界面変位の分布と (b) その変動場 (標準偏差)。等値線はそれぞれ (a) 5 m, (b) 2.5 m 間隔。

Fig. 3. 観測データが規則的に挿入される場合、誤差が定常状態に漸近することを概念的に示した図。[Gelb, 1974 より抜粋] 上が連続フィルター、下が離散フィルターの場合。

Fig. 4. カルマンフィルターの実質的な計算を行う縮小近似場。+ は η (105 点), \circ は u (104 点), \bullet は v (101 点) のそれぞれ計算位置を示す。

Fig. 5. 1993 年 8 月 1 日の (a) シミュレーション (非同化) と (b) 同化後の内部境界面変位 η の分布。等値線は 5 m 間隔。

Fig. 6. 1993 年 7 月 23 日より 8 月 7 日の CTD (conductivity-temperature- depth profiling system) 及び XBT (expendable bathythermograph) 観測に基づく 100, 200 m 水深における水温の水平分布。等値線は 1°C 間隔。観測点を黒点で示す。舞鶴海洋気象台発行の海洋速報 [1993] のデータを使用した。

Fig. 7. モデルの結果 H_x と高度計データ z との相関の分布。(a) はシミュレーション (非同化) $H_{x_{sim}}$ 、(b) は同化 H_{x_t} 、(c) は同化直前 $H_{x_t(-)}$ の各場合。等値線間隔は 0.1。黒点は使用したデータ点。

Fig. 8. モデルで説明することのできる変動の分散 (データの分散からモデルとデータの残差の分散を引いた量)。(a) はシミュレーション (非同化)、(b) は同化、(c) は同化直前の各場合。等値線は 0 cm^2 以上のみ、間隔は 5.0 cm^2 。ハッチ部は負の海域。黒点は使用したデータ点。